第16講　微分法・積分法(2)

1　a を定数とし，放物線 $y=-(x-a)^2+a+1$ を C とする．

(1)　放物線 $y=x^2$ と C が異なる2点で交わるような定数 a の値の範囲を求めよ．

(2)　a が(1)で求めた範囲にあるとし，$y=x^2$ と C の2つの共有点をP，Qとする．ただし，(Pの x 座標)＜(Qの x 座標)とする．Pにおける C の接線の傾きを m，Qにおける C の接線の傾きを n とするとき，積 mn を a を用いて表せ．また，mn のとり得る値の範囲を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　2つの放物線 $y=kx^2$ と $y=-x^2+1$ が共有点をもち，その点における2曲線の接線が直交する．このとき，定数 k の値と共有点の座標を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　3次関数 $f(x)=x^3+ax^2+b$ について，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における曲線の接線を l_t とする．

(1)　l_t の方程式を求めよ．

(2)　l_t が原点を通るような t の値がただ１つに定まるための a，b の条件を求めよ．

(3)　a，b が(2)の条件を満たすとき，点 $(a,\ b)$ が存在する領域を図示せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 16 講　微分法・積分法(2)

［1］　放物線 $y=-x^2$ に点 A$(0,\ a)$ から引いた 2 本の接線のなす角が $\dfrac{\pi}{2}$ となるとき，

a の値は $a=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

［2］　$a>0$ とする．3 次方程式 $x^3-ax+a=0$ がただ 1 つの実数解をもつとき，a の値の

範囲は $0<a<\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　微分法・積分法(2)

1　a を定数とし，放物線 $y=-(x-a)^2+a+1$ を C とする．

(1)　放物線 $y=x^2$ と C が異なる2点で交わるような定数 a の値の範囲を求めよ．

(2)　a が(1)で求めた範囲にあるとし，$y=x^2$ と C の2つの共有点をP，Qとする．ただし，(Pの x 座標)＜(Qの x 座標) とする．Pにおける C の接線の傾きを m，Qにおける C の接線の傾きを n とするとき，積 mn を a を用いて表せ．また，mn のとり得る値の範囲を求めよ．

(1)　$x^2=-(x-a)^2+a+1$　より　$2x^2-2ax+a^2-a-1=0$　……①

この式で　判別式 $D>0$ であればよい．

よって　$\dfrac{D}{4}=a^2-2(a^2-a-1)=-a^2+2a+2>0$　　$a^2-2a-2<0$

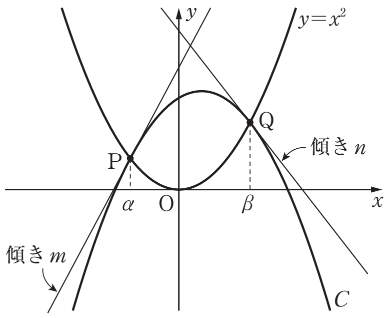
したがって　$\boldsymbol{1-\sqrt{3}<a<1+\sqrt{3}}$

(2)　P，Qの x 座標をそれぞれ α，β とすると，α，β は①の2解．よって，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=\frac{1}{2}(a^2-a-1)$$

また，C において　$y'=-2x+2a$　より

$$\begin{aligned}mn&=(-2\alpha+2a)(-2\beta+2a)\\&=4\alpha\beta-4a(\alpha+\beta)+4a^2\\&=2(a^2-a-1)-4a^2+4a^2=\boldsymbol{2a^2-2a-2}\end{aligned}$$



さらに　$mn=2\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{2}$　$(1-\sqrt{3}<a<1+\sqrt{3})$　より　$\boldsymbol{-\dfrac{5}{2}\leqq mn<2\sqrt{3}+4}$

2　2つの放物線 $y=kx^2$ と $y=-x^2+1$ が共有点をもち，その点における2曲線の接線が直交する．このとき，定数 k の値と共有点の座標を求めよ．

$f(x)=kx^2$，$g(x)=-x^2+1$　とすると，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標は

$kx^2=-x^2+1$　　$(k+1)x^2=1$　　共有点をもつので　$k+1>0$

$x^2=\dfrac{1}{k+1}$　よって　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$　　$\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$，$\beta=\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ とする．

$f'(x)=2kx$，$g'(x)=-2x$ であり，直交条件より

$f'(\alpha)\times g'(\alpha)=-1$　　$2k\alpha\times(-2\alpha)=-1$　　よって　$4k\alpha^2=1$　……①

$f'(\beta)\times g'(\beta)=-1$　　$2k\beta\times(-2\beta)=-1$　　よって　$4k\beta^2=1$　……②

$\alpha^2=\beta^2=\dfrac{1}{k+1}$ より　①，②はともに　$\dfrac{4k}{k+1}=1$　　$\boldsymbol{k=\dfrac{1}{3}}$

したがって，共有点の座標は　$\boldsymbol{\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　3次関数 $f(x)=x^3+ax^2+b$ について，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における曲線の接線を l_t とする．

(1)　l_t の方程式を求めよ．

(2)　l_t が原点を通るような t の値がただ１つに定まるための $a,\ b$ の条件を求めよ．

(3)　$a,\ b$ が(2)の条件を満たすとき，点 $(a,\ b)$ が存在する領域を図示せよ．

$f(x)=x^3+ax^2+b,\ f'(x)=3x^2+2ax$

(1)　P における曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式は

$y=(3t^2+2at)(x-t)+t^3+at^2+b$　　よって　l_t：$\boldsymbol{y=(3t^2+2at)x-2t^3-at^2+b}$

(2)　l_t が原点を通るとき，$0=-2t^3-at^2+b$　この方程式の実数解がただ１つとなるときを考える．

$g(t)=-2t^3-at^2+b$ とおくと　$g'(t)=-6t^2-2at=-2t(3t+a)$

(i)　$-\dfrac{a}{3}=0$　つまり　$a=0$ のとき　$g'(t)=-6t^2\leqq 0$　より　$g(t)$ は単調減少

よって　$g(t)=0$ はただ１つの実数解をもち，適する．

(ii)　$a\neq 0$　のとき　$g(t)$ は $t=0,\ -\dfrac{a}{3}$ で極値をとる．

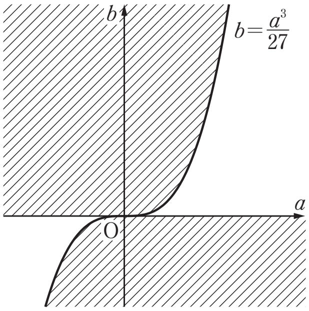
この２極値の積が正であればよい．

$$g(0)\times g\left(-\frac{a}{3}\right)>0 \quad \text{より} \quad b\left(b-\frac{a^3}{27}\right)>0$$

(i), (ii)より　$\boldsymbol{a=0}$　**または**　$\boldsymbol{b\left(b-\dfrac{a^3}{27}\right)>0}$

(3)　求める領域は右図斜線部分．

ただし，境界は原点を含み，他は含まない．



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　微分法・積分法(2)

[1]　放物線 $y=-x^2$ に点 A$(0,\ a)$ から引いた2本の接線のなす角が $\dfrac{\pi}{2}$ となるとき，

a の値は $a=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である．

$f(x)=-x^2$　とおくと　$f'(x)=-2x$

$x=t$ におけるこの放物線の接線の方程式は　$y=-2t(x-t)-t^2$　つまり　$y=-2tx+t^2$

これが A$(0,\ a)$ を通るとき　$a=t^2$　……①

点 A を通る接線が2本存在するのは，①が異なる2つの実数解をもつときである．

よって　$a>0$　であればよい．このとき①の解は　$t=\pm\sqrt{a}$

このとき2本の接線のなす角が $\dfrac{\pi}{2}$ であることから，直線の直交条件より

$$f'(\sqrt{a})\times f'(-\sqrt{a})=-1 \qquad (-2\sqrt{a})\cdot(2\sqrt{a})=-1 \qquad 4a=1 \qquad \text{よって}\quad a=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

[2]　$a>0$ とする．3次方程式 $x^3-ax+a=0$ がただ1つの実数解をもつとき，a の値の

範囲は $0<a<\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$ である．

$f(x)=x^3-ax+a$　とおくと，$a>0$ より

$f'(x)=3x^2-a=3\left(x+\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)=0$　は異なる2実数解　$x=\pm\sqrt{\dfrac{a}{3}}$　をもつ．

よって　$x=\pm\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ において $f(x)$ は2極値をとる．

したがって，$f(x)=0$ がただ1つの実数解をもつのは，$f(x)$ の2極値が同符号のときである．

ゆえに　$f\left(\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)\cdot f\left(-\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)>0$　　$\left(a-\dfrac{2}{3}a\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)\left(a+\dfrac{2}{3}a\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)>0$

$$a^2-\frac{4}{27}a^3>0 \qquad a>0 \text{ より}\quad 1-\frac{4}{27}a>0$$

よって　求める a の範囲は　　$0<a<\boldsymbol{\dfrac{27}{4}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。